السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	تحليلية الجداء السلمي حل مقترح	سلسلة 2

تمرين 1 : $(D): 6x-3y-3=0$ ، $(C):\ x^2+y^2-6x+4y-3=0$

1. لدينا : $x^2+y^2-6x+4y-3=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4=3+9+4 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=16$

بالتالي (C) دائرة مركزها $\Omega(3;-2)$ و شعاعها $r=\sqrt{16}=4$

2. لدينا : $(D): 6x-3y-3=0$ منه : $(D): 3y=6x-3$ بالتالي : $(D): y=2x-1$

3. لدينا : $d(\Omega;(D))=\dfrac{|2x_\Omega-y_\Omega-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt5}<4$ إذن (C) و (D) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين

4. لنحل النظمة:

$$(S)\begin{cases}x^2+y^2-6x+4y-3=0\\ y=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(2x-1)^2-6x+4(2x-1)-3=0\\ y=2x-1\end{cases}$$

$$(S)\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x^2-4x+1-6x+8x-4-3=0\\ y=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2-2x-6=0\\ y=2x-1\end{cases}$$

منه : $\Delta=4+120=124>0$: $x_1=\dfrac{2+\sqrt{120}}{10}=\dfrac{1+\sqrt{30}}{5}$ و $x_1=\dfrac{2-\sqrt{120}}{10}=\dfrac{1-\sqrt{30}}{5}$

منه :

$$(S)\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{30}}{5}\ ou\ x=\dfrac{1-\sqrt{30}}{5}\\ y=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{30}}{5}\\ y=\dfrac{-3+2\sqrt{30}}{5}\end{cases} ou \begin{cases}x=\dfrac{1-\sqrt{30}}{5}\\ y=\dfrac{-3-2\sqrt{30}}{5}\end{cases}\right)$$

بالتالي : $E\left(\dfrac{1+\sqrt{30}}{5};\dfrac{-3+2\sqrt{30}}{5}\right)$ و $F\left(\dfrac{1-\sqrt{30}}{5};\dfrac{-3-2\sqrt{30}}{5}\right)$

عمليا و خصوصا في الفروض نراعي أن تكون النتائج بسيطة، بمعنى أن لا تتضمن جذورا مربعة، لكننا آثرنا أن تتضمن الحلول الجذور المربع حتى يتم استيعاب الطريقة العامة لإيجاد إحداثيتي نقطتي تقاطع دائرة و مستقيم، و هي حل النظمة المكونة من معادلة الدائرة و المعادلة الديكارتية المختصرة أو التمثيل البارامتري للمستقيم.

تمرين 2 : $(\mathcal{C}_m):\ x^2+y^2+m\,x-m\,y-2m-2=0$

1. لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا :

$$M\in(\mathcal{C}_m)\Leftrightarrow x^2+y^2+m\,x-m\,y-2m-2=0 \Leftrightarrow x^2+mx+\frac{m^2}{4}+y^2-my+\frac{m^2}{4}=2m+2+\frac{m^2}{4}+\frac{m^2}{4}$$

$$M\in(\mathcal{C}_m)\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2+4m+4}{2}=\left(\frac{m+2}{\sqrt2}\right)^2$$

إذن، إذا كان $m=-2$ فإن $(\mathcal{C}_m)$ هي النقطة : $\Omega_m\left(\dfrac{-m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$

و إذا كان $m\neq-2$ فإن $(\mathcal{C}_m)$ هي الدائرة ذات المركز $\Omega_m\left(\dfrac{-m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$ و الشعاع $R_m=\left|\dfrac{m+2}{\sqrt2}\right|>0$

أحيانا تكون هذه المجموعة فارغة إذا كان التعبير الموجود في الطرف الأيمن سالبا

2

للإجابة عن هذا السؤال سنبحث عن قيمة x و y حيث تكون العبارة :

$\forall m\in IR \quad x^2+y^2+m\,x-m\,y-2m-2=0$ صحيحة حيث x و y أعداد ثابتة في هذه العبارة

العبارة السابقة تكافئ : $\forall m\in IR \quad x^2+y^2-2+m(x-y-2)=0$ مما يكافئ $\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\ x-y-2=0\end{cases}$

لأن العبارة السابقة عبارة دالة تآلفية متغيرها m ، و الدالة التآلفية (أو بصفة عامة الحدودية) تنعدم إذا و فقط إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة.

$$\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\ x-y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2+4y+4+y^2-2=0\\ x=y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^2+4y+2=0\\ x=y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2+2y+1=0\\ x=y+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y+1)^2=0\\ x=y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\ x=1\end{cases}$$

هذا يعني أن جميع الدوائر تمر من النقطة : $A(1;-1)$

يمكن إجراء عملية البحث عن النقطة في ورقة للبحث و إثبات أن إحداثيتيها تحققان معادلة الدوائر في ورقة التحرير : $x^2+y^2+m\,x-m\,y-2m-2=1+1+m+m-2m-2=0$ ، و يعتبر ذلك برهانا كافيا

كما يمكن اتباع طريقة أخرى و هي حل نظمة دائرتين من هذه الدوائر مثل : $(\ ,\ _0)$ و $(\ ,\ _1)$ لإيجاد نقطة تقاطعهما (أو حتى إنشاؤهما لمعرفة نقطة التقاطع) ثم بعد ذلك إثبات أن هذه النقطة تحقق معادلة كل الدوائر كما أشرنا في الملاحظة السابقة.

3

لدينا : $\Omega_m\left(\dfrac{-m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$ أي : $x_{\Omega_m}=\dfrac{-m}{2}$ و $y_{\Omega_m}=\dfrac{m}{2}$ منه : $y_{\Omega_m}=-x_{\Omega_m}$ إذن $\forall m\in IR \quad \Omega_m\in(\Delta)$

حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة : $(\Delta):\ y+x=0$

فكرة السؤال هي إيجاد علاقة مباشرة بين أفصول و أرتوب مراكز الدوائر عن طريق التخلص من البارامتر m

4

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى ، و نعتبر المتجهة $\vec{u}(-1;1)$ الموجهة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $M\in(L) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow -(x-1)+(y+1)=0 \Leftrightarrow x-y-2=0$

بالتالي: $(L):\ \ x-y-2=0$

5

لدينا : $d(\Omega_m,(L))=\dfrac{|x_\Omega-y_\Omega-2|}{\sqrt2}=\dfrac{\left|\dfrac{-m}{2}-\dfrac{m}{2}-2\right|}{\sqrt2}=\dfrac{|-m-2|}{\sqrt2}=\dfrac{|m+2|}{\sqrt2}=R_m$

بالتالي مماس لجميع الدوائر $(\ ,\ _m)$ ، و بما أن $A\in(\ ,\ _m)$ و $A\in(L)$ فإن نقطة التماس هي النقطة A

تمرين 3 : $\Omega(4,0)$ و $A(1,0)$ و $B(-1,1)$

1

لتكن E منتصف $[AB]$ ، منه : $E\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى ، لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;1)$ و $\overrightarrow{EM}\left(x;y-\dfrac{1}{2}\right)$

$M\in(\Delta) \Leftrightarrow -2x+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -4x+2y-1=0$ بالتالي : $(\Delta):\ 4x-2y+1=0$

2

لدينا : $R=\Omega A=\sqrt{3^2+0^2}=3$ ، إذن المعادلة الديكارتية للدائرة $(\ ,\ )$ ذات المركز Ω و المارة من النقطة A هي : $(\ ,\ ):\ (x-4)^2+y^2=9$

3

لدينا : $d(\Omega,(\Delta))=\dfrac{|4x_\Omega-2y_\Omega+1|}{\sqrt{16+4}}=\dfrac{17}{\sqrt{20}}>R$ ، إذن $(\ ,\ )$ و (Δ) غير متقاطعين ($\dfrac{17}{\sqrt{20}}\approx3{,}8$)

4

لدينا : $O\Omega=\sqrt{16+0}=4>R$ إذن O توجد خارج الدائرة $(\ ,\ )$

ليكن (L) أحد مماسي الدائرة $(\,¸\,)$ المارين من النقطة O.

إذا كان (L) موازيا لمحور الأراتيب فإن معادلته هي على الشكل : $x-a=0$ حيث $a\in IR$

وبما أن $O\in(L)$ فإن : $0-a=0$ منه : $a=0$ منه : $(L):\ x=0$

في هذه الحالة لدينا : $4=3 \Leftrightarrow \dfrac{|x_\Omega|}{\sqrt{1+0}}=3 \Leftrightarrow d(\Omega,(L))=R$

مما يعني أن كلا مماسي الدائرة لا يوازيان محور الأراتيب

إذن نستنتج أن (L) غير مواز لمحور الأراتيب إذن له معادلة مختصرة : $(L):\ y=ax+b$ حيث $(a,b)\in IR^2$

5 بما أن $O\in(L)$ فإن : $0=0+b$ منه : $b=0$ منه : $(L):\ y=a\,x$ أي : $(L):\ a\,x-y=0$

الآن :

$$d(\Omega,(L))=R \Leftrightarrow \frac{|ax_\Omega-y_\Omega|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=3 \Leftrightarrow |4a|=3\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 16a^2=9(a^2+1)$$

$$d(\Omega,(L))=R \Leftrightarrow 7a^2=9 \Leftrightarrow a=\frac{3}{\sqrt7}\ ou\ a=\frac{-3}{\sqrt7}$$

بالتالي مماسا الدائرتين المارين من O هما : $(L_1):\ y=\dfrac{3}{\sqrt7}x$ و $(L_2):\ y=\dfrac{-3}{\sqrt7}x$

هناك طرق أخرى لتحديد مماسي دائرة مارين من نقطة معلومة، لكن هذه أفضل طريقة ارتأيتها

قد نجد حالة يكون فيها أحد المماسين موازيا لمحور الأراتيب و الآخر غير مواز له

لدينا :

$$d(\Omega,(D_m))-3=\frac{|mx_\Omega-y_\Omega|}{\sqrt{m^2+1}}-3=\frac{|4m|-3\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{16m^2-9(m^2+1)}{\left(|4m|-3\sqrt{m^2+1}\right)\sqrt{m^2+1}}$$

$$d(\Omega,(D_m))-3=\frac{7m^2-9}{\left(|4m|-3\sqrt{m^2+1}\right)\sqrt{m^2+1}}=\frac{7\left(m-\frac{3}{\sqrt7}\right)\left(m+\frac{3}{\sqrt7}\right)}{\left(|4m|-3\sqrt{m^2+1}\right)\sqrt{m^2+1}}$$

6 إذن :

- إذا كان : $m=\dfrac{3}{\sqrt7}$ أو $m=\dfrac{-3}{\sqrt7}$ فإن $d(\Omega,(D_m))=3$ أي (D_m) يقطع الدائرة $(\,¸\,)$ في نقطة وحيدة
- إذا كان : $m>\dfrac{3}{\sqrt7}$ أو $m<\dfrac{-3}{\sqrt7}$ فإن $d(\Omega,(D_m))>3$ أي (D_m) لا يقطع الدائرة $(\,¸\,)$ في أي نقطة
- إذا كان : $\dfrac{-3}{\sqrt7}<m<\dfrac{3}{\sqrt7}$ فإن $d(\Omega,(D_m))<3$ أي (D_m) يقطع الدائرة $(\,¸\,)$ في نقطتين مختلفتين

تمرين 4 : $(C):\ x^2+y^2-4x+6y+9=0$

1 لدينا : $x^2+y^2-4x+6y+9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=4 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=4$

بالتالي (C) دائرة مركزها $\Omega(2;-3)$ و شعاعها $R=2$

2 لدينا : $(Ox):\ y=0$ و $(Oy):x=0$، وبما أن : $d(\Omega;(Ox))=\dfrac{|y_\Omega|}{1}=3>R$ و $d(\Omega;(Oy))=\dfrac{|x_\Omega|}{1}=2=R$

فإن (Oy) مماس للدائرة (C) إذن فهو يقطعها في نقطة وحيدة، بينما (Ox) لا يتقاطع معها في أي نقطة.

ليكن (Δ) أحد مماسي الدائرة الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-3,4)$، إذن له معادلة ديكارتية على شكل :

$4x+3y+c=0$ حيث $c\in IR$

3 إذن :

$$d(\Omega;(\Delta))=R \Leftrightarrow \frac{|4x_\Omega+3y_\Omega+c|}{\sqrt{16+9}}=2 \Leftrightarrow |-1+c|=10 \Leftrightarrow (-1+c=10)\ ou\ (-1+c=-10)$$

$$d(\Omega;(\Delta))=R \Leftrightarrow (c=11)\ ou\ (c=-9)$$

بالتالي : $(\Delta_1):4x+3y+11=0$ و $(\Delta_2):4x+3y-9=0$ هما مماسا الدائرة (C) بحيث المتجهة الموجهة

لهما هي : $\vec{u}(-3,4)$

4

ليكن (L) أحد مماسي الدائرة (C) المارين من النقطة $A(2,1)$.

إذا كان (L) موازيا لمحور الأراتيب فإن معادلته هي على الشكل : $x-a=0$ حيث $a \in IR$

وبما أن $A \in (L)$ فإن : $2-a=0$ منه : $a=2$ منه : $(L):\ x-2=0$

في هذه الحالة لدينا : $0=2 \iff \dfrac{|x_\Omega - 2|}{1} = 2 \iff d(\Omega,(L)) = R$

مما يعني أن كلا مماسي الدائرة لا يوازيان محور الأراتيب

إذن نستنتج أن (L) غير مواز لمحور الأراتيب إذن له معادلة مختصرة : $(L): y=ax+b$ حيث $(a,b) \in IR^2$

بما أن $A \in (L)$ فإن : $1=2a+b$ منه : $b=1-2a$

منه : $(L):\ y=a\,x+(1-2a)$ أي : $(L):\ a\,x-y+1-2a=0$

الآن :

$$d(\Omega,(L)) = R \iff \frac{|ax_\Omega - y_\Omega + 1 - 2a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = 2 \iff |2a+3+1-2a| = 2\sqrt{a^2+1} \iff 16 = 4(a^2+1)$$

$$d(\Omega,(L)) = R \iff 4a^2 = 12 \iff a=\sqrt{3}\ ou\ a=-\sqrt{3}$$

بالتالي مماسا الدائرتين المارين من A هما : $(L_1):\ y=\sqrt{3}x+1-2\sqrt{3}$ و $(L_2):\ y=-\sqrt{3}x+1+2\sqrt{3}$

تمرين 5 : $A(2,1)$ و $B(1,-2)$ ، $C(-1,2)$ ، $P(3,-4)$ ، $(\Delta_1):\ x+2y+5=0$

1

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1,-3)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,1)$ ، منه :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3-3 = 0$ و $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$ و $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$

بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

2

بما أن ABC قائم الزاوية في A فهو محاط بدائرة قطرها هو وتره، أي مركزها منتصف $[BC]$ و شعاعها $r=\dfrac{BC}{2}$

لتكن K منتصف $[BC]$ ، إذن: $K\left(\dfrac{x_B+x_C}{2} ; \dfrac{y_B+y_C}{2}\right)$ أي : $K(0\,;0)$

ولدينا : $BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(-2)^2+(2+2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

منه : $r=\sqrt{5}$ ، بالتالي : معادلة الدائرة $(\ ,\ )$ المحيطة بالمثلث ABC هي : $(\ ,\ ): (x-x_K)^2+(y-y_K)^2 = r^2$

أي : $(\ ,\ ): x^2+y^2=5$

3

لدينا : $d(K;(\Delta_1)) = \dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = r$ إذن المستقيم $(\Delta_1): x+2y+5=0$ مماس للدائرة $(\ ,\ )$

4

لدينا : $x_P+2y_P+5 = 3-8+5 = 0$ ، إذن $P \in (\Delta_2)$

إذا كان (Δ_2) موازيا لمحور الأراتيب فإن معادلته هي على الشكل : $x-a=0$ حيث $a \in IR$

وبما أن $P \in (\Delta_2)$ فإن : $3-a=0$ منه : $a=3$ منه : $(\Delta_2):\ x-3=0$

في هذه الحالة لدينا : $3=\sqrt{5} \iff \dfrac{|x_\Omega - 3|}{1} = \sqrt{5} \iff d(\Omega,(\Delta_2)) = R$

إذن نستنتج أن (Δ_2) غير مواز لمحور الأراتيب إذن له معادلة مختصرة : $(\Delta_2): y=ax+b$ حيث $(a,b) \in IR^2$

بما أن $P \in (\Delta_2)$ فإن : $-4=3a+b$ منه : $b=-3a-4$

منه : $(\Delta_2):\ y = a\,x + (-3a-4)$ أي : $(\Delta_2):\ a\,x - y - 3a - 4 = 0$

الآن :

$$d(\Omega,(\Delta_2)) = R \Leftrightarrow \frac{|ax_\Omega - y_\Omega - 3a - 4|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |-3a-4| = \sqrt{5}\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 9a^2 + 24a + 16 = 5a^2 + 5$$

$$d(\Omega,(\Delta_2)) = R \Leftrightarrow 4a^2 + 24a + 11 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}\ ou\ a = -6$$

(لأن: $\Delta = 24^2 - 4\times 4\times 11 = 400$ ، $a_1 = \frac{-24+20}{8} = \frac{-1}{2}$ و $a_2 = \frac{-24-20}{8} = -6$)

بالتالي نجد أن : $(\Delta_2):\ \ y = -6x + 14$ (القيمة $\frac{-1}{2}$ تعطينا معادلة المماس الأول).